**Определение исходного допустимого базисного решения**

Предполагаем, что проблема в канонической форме.

Для запуска симплексного алгоритма требуется базовое допустимое решение. Найти его просто путем тестирования - непростая задача, учитывая, что он включает в себя поиск основного второстепенного, его изменение и вычисление решения, только теперь вы можете увидеть, есть ли в нем все положительные компоненты, этот поиск может занять много времени.

Решение проблемы начинается с наблюдения, что единственной основой, для которой вышеупомянутые вычисления могут быть выполнены немедленно, является единичная матрица, и в этом случае соответствующее базовое решение - это вектор свободных членов. Это предполагает, что в задаче все свободные члены больше или равны 0 и что в матрице A есть все столбцы единичной матрицы.

Если все свободные члены можно очень просто сделать больше или равными 0, возможно, умножив на -1 соответствующее ограничение, существование всех столбцов единичной матрицы, очевидно, очень маловероятно и труднодостижимо.

В этом смысле мы начинаем с наблюдения, что существование вектора в единичном столбце среди столбцов матрицы A эквивалентно существованию переменной, которая появляется только в одном уравнении с коэффициентом 1. Это можно получить двумя способами:

а) Начиная с первого уравнения, мы ищем переменную, у которой есть коэффициент того же знака, что и свободный член, мы исключаем ее из остальных уравнений и повторяем процедуру начиная со второго уравнения. Возможны три случая:

1) в некоторый момент мы получаем уравнение, в котором все коэффициенты при переменных имеют знак, противоположный свободному члену, хотя бы один из них отличен от 0. В этом случае уравнение, очевидно, не имеет допустимого (положительного) решения. и поэтому проблема не имеет решения;

2) все коэффициенты переменных и свободный член равны 0. В этом случае получается, что это уравнение является результатом предыдущих и будет исключено, переходя к следующему;

3) все уравнения исчерпаны. На этом этапе переменные, которые были взяты из каждого уравнения, образуют желаемую основу.

Вышеупомянутая процедура может показаться привлекательной, но она включает в себя введение другого симплексного алгоритма, влияющего на однородность вычислений и скорость работы. Кроме того, после выполнения приведенных выше расчетов данные проблемы больше не имеют первоначального экономического значения, мы больше не можем делать экономические интерпретации.

б) Для всех векторов-столбцов введем в соответствующие уравнения переменную с коэффициентом 1. Очевидно, мы получим новую систему ограничений, и еще неизвестно, какова связь между ее решениями и исходным. Две системы имеют вид:

Ax = b и Ax + y = b

Очевидно, что решение первой системы является также решением второй (мы берем y = 0), а решение второй является решением для первой, только если y = 0. Таким образом, наша цель будет заключаться в следующем. из начального решения второй задачи, чтобы прийти к его решению, в котором y = 0. Принимая во внимание, что в базовых решениях все второстепенные переменные равны 0, мы попытаемся удалить из базы переменные y . Однако цель симплексного алгоритма - максимизировать целевую функцию, а не удалить одну или другую переменную из базы. Чтобы приравнять эти две цели, мы можем поступить двумя способами:

1) Мы выбираем новую целевую функцию, которая достигает своего экстремума среди положительных решений даже при y = 0, и когда мы получаем соответствующее решение, мы начинаем с этого в качестве начального решения симплекс-алгоритм для первой задачи.

2) Мы добавляем к прежней целевой функции новые переменные с некоторыми коэффициентами такой природы, выбранными таким образом, чтобы вклад переменных y в значение функции противоречил желаемой цели (очень высокие положительные результаты в минимальной задаче и очень большие минусы в проблеме максимум).

Мы подробно рассмотрим два метода:

**Двухфазный метод.**

Итак, имеем задачу



В которой правые части ограничений неотрицательны.

На первом этапе (первой фазе) составляем задачу



Решаем эту задачу симплекс методом. В результате могут быть два случая:

1. **Минимум функции *g* строго положителен**. Это означает, что равенство Ax + y = b выполняется только для y > 0 , но это влечет за собой, что Ax > b для любого x ≥ 0, то есть система Ax = b не имеет допустимых решений, т.е. исходная задача линейного программирования не имеет решений.
2. **Минимум функции *g* равен 0**. В этом случае полученное оптимальное решение влечет за собой, что y = 0, т.е. выполняется равенство Ax = b. Это оптимальное решение и является исходным допустимым базисным решением для исходной задачи ЛП.

На втором этапе (вторая фаза) решаем исходную задачу симплекс методом.

**Метод штрафных коэффициентов (метод искусственного базиса.**

Итак, имеем задачу



В которой правые части ограничений неотрицательны.

Составляем задачу



где M - предположительно очень большая константа (больше, чем любая константа, которая может появиться при решении проблемы). Мы решаем задачу с помощью симплексного алгоритма.

Возможны следующие ситуации:

1) у задачи бесконечный оптимум. В этом случае исходная задача имеет бесконечный оптимум.

2) задача имеет конечный оптимум и в оптимальном решении есть хотя бы одна переменная из вектора y. В этом случае исходная задача не имеет допустимых решений.

3) задача имеет конечный оптимум и в оптимальном решении нет переменной от вектора y. В этом случае исходная задача имеет конечный оптимум, оптимальное решение и максимум функции такие же, как и в модифицированной задаче.

Наконец, отметим, что переменные y не соответствуют некоторым экономическим величинам, в отличие от других, они вводятся только в качестве вычислительного средства для запуска симплексного алгоритма. По этой причине их называют искусственными переменными.

*Пример* Рассмотрим задачу:



Приводим ее к каноническому виду:



Одна базисная переменная есть - у нас есть столбец единичной матрицы  который соответствует переменной x3. Чтобы получит второй столбец единичной матрицы  введем переменную x5 с коэффициентом 1 во второе уравнение. В результате мы получим задачи

|  |  |
| --- | --- |
| **Двухфазный метод** | Метод штрафных коэффициентов |
|  |  |

Решим двухфазхным методом

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| cB | xB | *x*B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 |
| 0 | x3 | 10 | 3 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | x5 | 2 | 1 | 4 | 0 | -1 | 1 |
|  |  | 2 | 1 | 4 | 0 | -1 | 1 |
|  |  |  | 1 | 4 | 0 | -1 | 0 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| cB | xB | *x*B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 |
| 0 | x3 |  |  | 0 | 1 |  |  |
| 0 | x2 |  |  | 1 | 0 |  |  |
|  |  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 |

Мы получили оптимальное решение с нулевым значением целевой функции и базисным решение (x3,x2), которое и является исходным допустимым базисным решением для симплекс метод применяемого на второй фазе.

Удаляем из симплекс таблицы столбец, который соответствует переменной x5, заменяем коэффициенты целевой функции, пересчитываем значение целевой функии и оценкиe Δ. Получаем симплекс таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | 2 | 3 | 0 | 0 |
| cB | xB | *x*B | x1 | x2 | x3 | x4 |
| 0 | x3 |  |  | 0 | 1 |  |
| 3 | x2 |  |  | 1 | 0 |  |
|  |  |  |  | 0 | 0 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | 2 | 3 | 0 | 0 |
| cB | xB | *x*B | x1 | x2 | x3 | x4 |
| 0 | x3 | 4 | 0 | -11 | 1 | 3 |
| 2 | x1 | 2 | 1 | 4 | 0 | -1 |
|  |  | 4 | 0 | 5 | 0 | -2 |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | 2 | 3 | 0 | 0 |
| cB | xB | *x*B | x1 | x2 | x3 | x4 |
| 0 | x4 |  | 0 |  |  | 1 |
| 2 | x1 |  | 1 |  |  | 0 |
|  |  |  | 0 |  |  | 0 |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | 2 | 3 | 0 | 0 |
| cB | xB | *x*B | x1 | x2 | x3 | x4 |
| 0 | x4 | 38 | 11 | 0 | 4 | 1 |
| 3 | x2 | 10 | 3 | 1 | 1 | 0 |
|  |  | 30 | 7 | 0 | 3 | 0 |

Оптимальное решение исходной задачи x1 = 0 и x2 = 10 которое доставляет максимальное значение целевой функции равное 30.

Решая методом штрафных коэффициентов последовательно получаем:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | 2 | 3 | 0 | 0 | -M |
| cB | xB | *x*B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 |
| 0 | x3 | 10 | 3 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| -M | x5 | 2 | 1 | 4 | 0 | -1 | 1 |
|  |  | -2M | -M | -4M | 0 | M | -M |
|  |  |  | -M-2 | -4M-3 | 0 | M | 0 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | 2 | 3 | 0 | 0 | -M |
| cB | xB | *x*B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 |
| 0 | x3 |  |  | 0 | 1 |  |  |
| 3 | x2 |  |  | 1 | 0 |  |  |
|  |  |  |  | 0 | 0 |  | M+ |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | 2 | 3 | 0 | 0 | -M |
| cB | xB | *x*B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 |
| 0 | x3 | 4 | 0 | -11 | 1 | 3 | -3 |
| 2 | x1 | 2 | 1 | 4 | 0 | -1 | 1 |
|  |  | 4 | 0 | 5 | 0 | -2 | 2+M |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | 2 | 3 | 0 | 0 | -M |
| cB | xB | *x*B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 |
| 0 | x4 |  | 0 |  |  | 1 | -1 |
| 2 | x1 |  | 1 |  |  | 0 | 0 |
|  |  |  | 0 |  |  | 0 | M |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | 2 | 3 | 0 | 0 | -M |
| cB | xB | *x*B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 |
| 0 | x4 | 38 | 11 | 0 | 4 | 1 | -1 |
| 3 | x2 | 10 | 3 | 1 | 1 | 0 | 0 |
|  |  | 30 | 7 | 0 | 3 | 0 | M |

Очевидно, что решение то же самое.